REPUBLIKA E SHQIPËRISË
MINISTRIA E ARSIMIT
DHE SPORTIT

QENDRA E SHËRBIMEVE ARSIMORE

OLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS PËR ARSIMIN E MESËM TË ULËT

Viti shkollor 2022-2023

Faza e tretë

ZGJIDHJET

Ushtrimi 1

Zgjidhni ekuacionin $4x\sqrt{x-1} = 3x^2 - 8x + 5$ 10 pikë

Zgjidhje

Vëmë re se:

$4x\sqrt{x-1} = 3x^2 - 8x + 5 \Leftrightarrow$

$\left(2\sqrt{x-1} + x\right)^2 = (2x-1)^2 \Leftrightarrow 4(x-1) + 4x\sqrt{x-1} + x^2 = 4x^2 - 4x + 1$, kështu që për

$x \geq 1$kemi:

$2\sqrt{x-1} + x = 2x - 1$ nga ku, duke zëvendësuar $\sqrt{x-1} = t \Rightarrow 2t = t^2 \Leftrightarrow t_1 = 0 \ ose \ t_2 = 2$,

përftojmë dy rrënjë reale $x_1 = 1 \ ose \ x_2 = 5$.

Ushtrimi 2

Gjeni numrin e gjithë trekëndëshave këndgjerë, dybrinjënjëshëm, me perimetër 2022 njësi, të cilët i kanë gjatësitë e brinjëve numra natyrorë. 10 pikë

Zgjidhje

Le të jetë një trekëndësh këndgjerë, dybrinjënjëshëm me brinjë $x\ njësi,\ x\ njësi,\ \mathrm{y}\ njësi$, ku $x,\ \mathrm{y} \in N$. Kemi: $2x + y = 2022 \Rightarrow y = 2(1011 - x)$. Pra y – është numër çift.

Gjithashtu nga teoria e largesave kemi se $y < 2x \Rightarrow y < 1011$

Kështu mund të përcaktojmë natyrën e gjatësive të brinjëve për trekëndëshat në fjalë si vijon:

$(y, x, x) \in \{(1010, 506, 506), (1008, 507, 507), (1006, 508, 508)...\}$

Siç vihet re, natyra e brinjëve të trekëndëshave në fjalë, është e trajtës:

$(y, x, x) \equiv (1012 - 2k;\ 505 + k;\ 505 + k)\ \ ku\ k = 1, 2, 3...168\ (y > x)$

Meqenëse trekëndëshat janë këndgjerë kemi: $y^2 > 2x^2 \Leftrightarrow (1012 - 2k)^2 > 2(505 + k)^2$

Shndërrojmë inekuacionin kuadratik dhe kemi:

$$(1012 - 2k)^2 > 2(505 + k)^2 \Leftrightarrow (1012 - 2k) > \sqrt{2}(505 + k)$$
$$\Leftrightarrow k\left(2 + \sqrt{2}\right) < 1012 - 505\sqrt{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k < \frac{1012 - 505\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \approx 87,243$$

Pra gjithsej janë 87 trekëndësha të tillë.

Ushtrimi 3

Le të jenë $p,\ q,\ r,$ tre numra të thjeshtë dhe të ndryshëm nga njëri tjetri. Provoni se për çdo tre numra të tillë, rrënjët kubike të tyre ***nuk*** mund të jenë kufiza të një vargu aritmetik, qofshin ato edhe jo të njëpasnjëshme. 10 pikë

Zgjidhje

Le të jenë $p,\ q,\ r,$ tre numra të thjeshtë dhe të ndryshëm nga njëri tjetri. Supozojmë se rrënjët kubike të tyre ***mund*** të jenë kufiza të një vargu aritmetik me ndryshesë ***d***, jo të njëpasnjëshme. Në këtë rast mund të shkruajmë:

$(1) \qquad \sqrt[3]{p} = a$

$(2) \qquad \sqrt[3]{q} = a + md$,

$(3) \qquad \sqrt[3]{r} = a + nd$

ku $m, n \in Z,\ m \neq n$

Eliminojmë ***a*** dhe ***d*** në relacionet më sipër:

$(2)-(1) \Leftrightarrow \sqrt[3]{q} - \sqrt[3]{p} = md \qquad (3)$

$(3)-(1) \Leftrightarrow \sqrt[3]{r} - \sqrt[3]{p} = nd \qquad (4)$

Vlerësojmë raportin e $(3)\ me\ (4)$:

$$\frac{\sqrt[3]{q}-\sqrt[3]{p}}{\sqrt[3]{r}-\sqrt[3]{p}} = \frac{md}{nd} \Leftrightarrow \frac{\sqrt[3]{q}-\sqrt[3]{p}}{\sqrt[3]{r}-\sqrt[3]{p}} = \frac{m}{n}$$

$$\Leftrightarrow m\sqrt[3]{r} - n\sqrt[3]{q} = (m-n)\sqrt[3]{p} \qquad (5)$$

Ngremë në kub të dy anët e barazimit (5):

$$m^3r - n^3q - 3mn\sqrt[3]{rq}\left(m\sqrt[3]{r} - n\sqrt[3]{q}\right) = (m-n)^3\ p$$

Duke shfrytëzuar barazimin $m\sqrt[3]{r} - n\sqrt[3]{q} = (m-n)\sqrt[3]{p}$, kemi:

$$3mn(m-n)\sqrt[3]{pqr} = m^3r - n^3q - (m-n)^3\ p$$

Vëmë re se për $m, n \in Z$ dhe $p,\ q,\ r,$ të thjeshtë, ndaj ana e majtë e barazimit është irracionale pasi faktori $\sqrt[3]{pqr}$ është irracional, ndërkohë që ana e djathtë e barazimit është numër i plotë. Ky kontradiksion demonstron se supozimi i bërë më sipër është i gabuar.

Pra rrënjët kubike të numrave të thjeshtë $p,\ q,\ r,$ ***nuk mund*** të jenë kufiza të një vargu aritmetik.

Ushtrimi 4

Përgjysmoret e këndit të brendshëm $\hat{B}$ dhe e këndit të jashtëm $\hat{C}$ në një trekëndësh çfarëdo ΔABC, priten në pikën D. Nga pika D ndërtohet drejtëza paralele me brinjën BC, e cila pret brinjët AC dhe AB përkatësisht në pikat L dhe M. Nëse gjatësitë e brinjëve anësore të trapezit CLMB janë $7 \text{ dhe } 9 \text{ njesi}$, gjeni gjatësinë e bazës LM të trapezit. 10 pikë

Zgjidhje

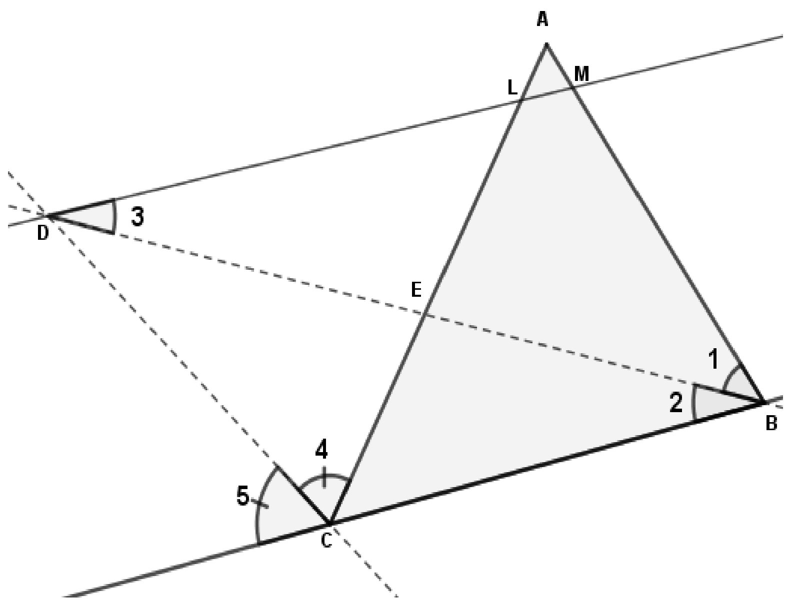
Nisur nga të dhënat e problemës dhe skica përbri, kanë vend barazimet:

$\hat{1} = \hat{2}$ dhe $\hat{2} = \hat{3} \Rightarrow \hat{1} = \hat{3}$, çka do të thotë se trekëndëshi ΔDMB është dybrinjënjëshëm, $\mathrm{DM=MB}$

Me të njëjtin arsyetim kemi që:

$\hat{4}=\hat{5}$ dhe $\hat{5}=\mathrm{L\hat{D}C} \Rightarrow$ $\hat{4}=\mathrm{L\hat{D}C}$. Kështu që edhe $\Delta\mathrm{LDC}$ është dybrinjënjëshëm, $\mathrm{DL=CL}$.

Meqenëse $\mathrm{DM=DL+LM}$, duke bërë zëvendësimet me përfundimet e nxjerra më sipër, kemi $\mathrm{DM=CL+LM}$ ose $\mathrm{LM=MB-LC}$, nga ku $\mathrm{LM}= 9-7=2\ njesi$



Ushtrimi 5

Provoni se mosbarazimi i mëposhtëm është i vërtetë. 10 pikë

$\mathrm{n} > \sqrt{n} + \sqrt[3]{n} + \sqrt[4]{n}$, $\forall n \in N \,/\, n \geq 9$

Zgjidhje

Për çdo $n \in N$, kemi:

$\sqrt{n} = \sqrt{n}$

$\sqrt{n} > \sqrt[3]{n}$

$\sqrt{n} > \sqrt[4]{n}$

Duke mbledhur anë për anë, marrim mosbarazimin e vërtetë:

$3\sqrt{n} > \sqrt{n} + \sqrt[3]{n} + \sqrt[4]{n} = s$. Ngremë në katror të dy anët:

$9n > s^2$, por $n^2 \geq 9n > s^2$ për $n \geq 9 \Rightarrow n > s$, pra vërtet që $\mathrm{n} > \sqrt{n} + \sqrt[3]{n} + \sqrt[4]{n}$

Shënim: Pranohet çdo zgjidhje tjetër e saktë, që nuk është parashikuar më lart, të cilin komisioni i vlerësimit e gjykon si të tillë.