REPUBLIKA E SHQIPËRISË
MINISTRIA E ARSIMIT
DHE SPORTIT

QENDRA E SHËRBIMEVE ARSIMORE

OLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS PËR ARSIMIN E MESËM TË LARTË

Viti shkollor 2022-2023 **Faza e tretë**

ZGJIDHJET

Ushtrimi 1

Le të jetë $f : N \times N \to N$ një funksion i përcaktuar në mënyrë të tillë që:
$f(1\,;1) = 2,\ f(a+1\,;b) = f(a;b) + a\ dhe\ f(a\,;b+1) = f(a;b) - b,\ \forall a,\ b \in N$. Gjeni gjithë çiftet e renditur $(x;y) \in N^2 \,/\, f(x;y) = 2023$ **10 pikë**

Zgjidhje

Nisur nga natyra e funksionit të dhënë, kanë vend kalimet:

$$\begin{aligned} f(x;y) &= f(x-1;y) + x - 1 = \\ &= f(x-2;y) + (x-2) + (x-1) = \ldots \\ &= f(1;y) + \frac{x(x-1)}{2} = \\ &= f(1;y-1) - (y-1) + \frac{x(x-1)}{2} = \ldots. \\ &= f(1;1) - \frac{y(y-1)}{2} + \frac{x(x-1)}{2} = 2023 \end{aligned}$$

Por nga kushti kemi se $f(1;1) = 2$, ndaj:

$2 - \frac{y(y-1)}{2} + \frac{x(x-1)}{2} = 2023$, prej nga:

$\frac{x(x-1)}{2} - \frac{y(y-1)}{2} = 2021 \Leftrightarrow (x-y)(x+y-1) = 2 \times 2021 = 2 \times 43 \times 47$

Vëmë re se $2, 43\ dhe\ 47$ janë të thjeshtë dhe duke pasur parasysh se $x - y < x + y - 1,\ \forall x,\ y \in N$, kemi rastet që vijojnë:

I. $x - y = 1\ dhe\ x + y - 1 = 4042$. Nga ku $x = y + 1 \Rightarrow 2y = 4042 \Rightarrow y = 2021$ dhe $x = 2022$

II. $x - y = 2\ dhe\ x + y - 1 = 2021$.
Nga ku $2y = 2020 \Rightarrow y = 1010\ dhe\ x = 1012$.

III.
$x - y = 43\ dhe\ x + y - 1 = 94 \Leftrightarrow$
$x = y + 43\ dhe\ 2y + 42 = 94,\ pra\ \begin{cases} x = 69 \\ y = 26 \end{cases}$

IV.
$x - y = 47\ dhe\ x + y - 1 = 86 \Leftrightarrow$
$x = y + 47\ dhe\ 2y + 46 = 86,\ pra \begin{cases} x = 67 \\ y = 20 \end{cases}$

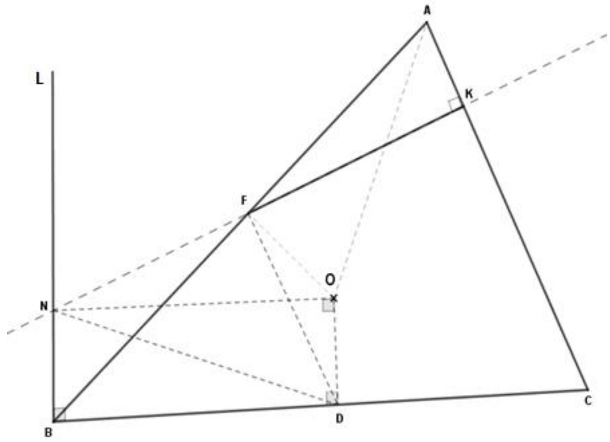
Pra çiftet e kërkuara janë $(x;y) \in \{(2022\,;2021),\ (1012\,;1010),\ (69\,;26),\ (67\,;20)\}$

Ushtrimi 2
Jepet trekëndëshi këndngushtë ΔABC. Pikat D dhe F janë përkatësisht meset e brinjëve BC dhe AB. Ndërtohet pingulja FK mbi AC. Nga kulmi B i trekëndëshit, ngrihet pingulja BL me BC. Shënojmë me N pikëprerjen e BL me FK. Provoni se gjatësia e segmentit DN është sa rrezja e rrethit të jashtëshkruar trekëndëshit ΔABC. **10 pikë**

Zgjidhje

Le të jetë O qendra e rrethit të jashtëshkruar ΔABC (Pikëprerja e përmesoreve të trekëndëshit) dhe *R* rrezja e tij.
Bashkojmë *O* me pikat *D*, *F* dhe *N*.
Mjafton të provojmë se katërkëndëshi BDON është drejtkëndësh, kështu që do të kishim: OB=DN=R si diagonale të tij, çka përbën dhe zgjidhjen e problemit.
Vëmë re se $\sphericalangle NBC = \sphericalangle NKC = 90^0$, kështu që katërkëndëshi $BCKN$ është ciklik.
Prandaj $\sphericalangle KNB = 180^0 - \sphericalangle BCK$. Por $\sphericalangle BOA = 2\sphericalangle BCA$ dhe OF përgjysmore e këndit $\sphericalangle BOA$, kështu që $\sphericalangle BOF = \sphericalangle BCA$,prej nga marrim barazimin e vërtetë:
$\sphericalangle FNB + \sphericalangle BOF = \sphericalangle KNB + \sphericalangle BCK = 180^0$, kjo do të thotë se pikat B, O, F, N janë kociklike. Kështu që $\sphericalangle BFO = \sphericalangle BNO$, por $\sphericalangle BFO = 90^0$, pasi $OF \perp AB$, rrjedhimisht $\sphericalangle BNO = 90^0$. Meqenëse $NB \perp BC$ dhe $OD \perp BC$, atëherë katërkëndëshi BDON është drejtkëndësh, pra provuam ç'deshëm: OB=DN=R

Zgjidhje alternative e ushtrimit 2



Vini re:
$\sphericalangle NFB = \sphericalangle AFK = 90^0 - \sphericalangle BAC$ dhe
$\sphericalangle BNF = 180^0 - \sphericalangle ABC$
Meqenëse katërkëndëshi BCKN është ciklik. Duke përdorur teoremën e sinusit në ΔBFN, kemi:
$\dfrac{BN}{\sin(\sphericalangle NFB)} = \dfrac{BF}{\sin(\sphericalangle BFN)}$, nga ku
$BN = \dfrac{AB\cos(\sphericalangle BAC)}{2\sin(\sphericalangle BCA)} = R\cos(\sphericalangle BAC)$, por
$BD = \dfrac{BC}{2} = R\sin(\sphericalangle BAC)$, ndaj
$ND^2 = BN^2 + BD^2 = R^2\cos^2(\sphericalangle BAC) + R^2\sin^2(\sphericalangle BAC) = R$, pra $R = ND$.

Ushtrimi 3

Jepet ekuacioni kubik $x^3+ax^2+bx+c=0$. Dy studentë zhvillojnë një lojë mes njëri-tjetrit si vijon: Si fillim studenti A duhet të ofrojë një numër real, ndërsa studenti B duhet ta vendosë këtë numër në vend të njërit prej koeficienteve të panjohur në ekuacionin e dhënë. Pas tri veprimesh të tilla, studenti A do të fitojë nëse në fund përftohet një ekuacion, i cili ka tri rrënjë të plota dhe të ndryshme nga njëra tjetra, në të kundërt ai humbet, pra fiton studenti B. Tregoni duke argumentuar se studenti A ka strategjinë fituese në këtë lojë. **10 pikë**

Zgjidhje

Studenti A ka strategjinë fituese, sepse:

Shqyrtojmë polinomin x^3+ax^2+bx+c

Le të supozojmë se në fillim *studenti A* ofron numrin 0, atëherë studenti B mund të kryejë këtë veprimtari:

Rasti I: *Studenti B* zgjedh të vendosë $a=0$, duke përftuar polinomin në trajtën $x^3+bx+c=0$. Më pas *studenti A* ofron numrin $-(mnp)^2$, ku m, n, p janë numra të plotë pozitivë, të tillë që $m^2+n^2=p^2$.

Nëse *studenti B* vendos që $b=-(mnp)^2$, atëherë *studenti A* do të ofrojë si $c=0$ (që të fitojë lojën). Në këtë rast polinomi ynë merr trajtën $x(x-mnp)(x+mnp)$.

Nëse *studenti B* zgjedh që $c=-(mnp)^2$, atëherë *studenti A* do të ofrojë $b=m^2n^2-n^2p^2-p^2m^2$ dhe polinomi ynë merr trajtën $(x+m^2)(x+n^2)(x-p^2)$, i cili ka tri rrënjë të plota dhe të ndryshme.

Rasti II: Studenti B zgjedh të vendos që $b=0$, në këtë rast kemi ekuacionin $x^3+ax^2+c=0$

Atëherë *studenti A* do të ofrojë numrin $m^2(m+1)^2(m^2+m+1)^3$, ku m është i plotë dhe $m>1$.

Nëse *studenti B* zgjedh që $a=m^2(m+1)^2(m^2+m+1)^3$, atëherë *studenti A* do të ofrojë $c=-m^8(m+1)^8(m^2+m+1)^6$ dhe polinomi do të marrë formën $(x-mp)[x+(m+1)p][x+m(m+1)p]$, ku $p=m^2(m+1)^2(m^2+m+1)^2$

Nëse *studenti B* zgjedh që $c=m^2(m+1)^2(m^2+m+1)^3$, atëherë *studenti A* do të ofrojë si $a=-(m^2+m+1)^2$. Nëse shënojmë $q=m^2+m+1$, atëherë polinomi merr trajtën $(x+mq)[x-(m+1)q][x-m(m+1)q]$, i cili ka tri rrënjë të plota dhe të ndryshme.

Rasti III: *Studenti B* zgjedh që $c=0$, atëherë *studenti A* do të ofrojë dy numra të plotë për koeficientet $a\ dhe\ b$, të tillë që $ab(a-1)(b-1)\neq 0$ dhe $a+b=1$, ndaj dhe polinomi në këtë rast merr trajtën $x(x-1)(x-a)$ ose $x(x-1)(x-b)$, përkatësisht me rrënjë $x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=a\ dhe\ x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=b$

Kjo përbën dhe argumentin e kërkuar.

Ushtrimi 4

Jepet vargu i numrave reale pozitivë $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ dhe numri natyror n, i tillë që $n \geq 3$. Me supozimin se ka vend barazimi $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1+x_j} = 1$, provoni se

$$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}+...+\sqrt{x_n} \geq (n-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}+\frac{1}{\sqrt{x_2}}+\frac{1}{\sqrt{x_3}}+...+\frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)$$

10 pikë

Zgjidhje

Për të ruajtur simetrinë, supozojmë se $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq ... \leq x_n$.

Provojmë fillimisht vërtetësinë e pohimit:

"Për çdo $i, j \,/\, 1 \leq i \leq j \leq n$, ka vend mosbarazimi: $\frac{\sqrt{x_i}}{1+x_i} \geq \frac{\sqrt{x_j}}{1+x_j}$"

Vërtet: Për $n \geq 3$ dhe meqenëse $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i} = 1$, kemi që:

$1 > \frac{1}{1+x_i}+\frac{1}{1+x_j} = \frac{2+x_i+x_j}{(1+x_i)(1+x_j)}$ ose $1+x_i+x_j+x_ix_j > 2+x_i+x_j$, nga ku

$x_ix_j > 1$, prandaj $\frac{\sqrt{x_i}}{1+x_i}-\frac{\sqrt{x_j}}{1+x_j} = \frac{\sqrt{x_i}(1+x_j)-\sqrt{x_j}(1+x_i)}{(1+x_i)(1+x_j)} = \frac{\left(\sqrt{x_i}-\sqrt{x_j}\right)\left(1-\sqrt{x_ix_j}\right)}{(1+x_i)(1+x_j)} \geq 0$,

kështu që vërtet kemi se $\frac{\sqrt{x_i}}{1+x_i} \geq \frac{\sqrt{x_j}}{1+x_j}$, për çdo $i, j \,/\, 1 \leq i \leq j \leq n$.

Nga sa provuam më sipër, kemi: $\frac{\sqrt{x_1}}{1+x_1} \geq \frac{\sqrt{x_2}}{1+x_2} \geq ... \geq \frac{\sqrt{x_n}}{1+x_n}$.

Meqenëse $\frac{1}{\sqrt{x_1}} \geq \frac{1}{\sqrt{x_2}} \geq ... \geq \frac{1}{\sqrt{x_n}}$,

Nga mosbarazimi i ***Chebyshev***-it kemi:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{x_i}} \cdot \sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{x_i}}{1+x_i} \leq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{x_i}} \cdot \frac{\sqrt{x_i}}{1+x_i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i} = 1 \qquad \textbf{(1)}$$

Nga mosbarazimi i **Cauchy-Schwartz** kemi:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{x_i}}{1+x_i} \cdot \sum_{i=1}^{n}\frac{1+x_i}{\sqrt{x_i}} \geq n^2 \text{ ose } \sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{x_i}}{1+x_i}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{x_i}}+\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\right) \geq n^2 \qquad \textbf{(2)}$$

Duke shumëzuar të dy anët e mosbarazimit **(2)** me $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{x_i}}$ dhe zëvendësuar në mosbarazimin **(1)**, kemi që:

$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{x_i}}+\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i} \geq n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{x_i}} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i} \geq (n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{x_i}}$, çka donim dhe të provonim.

Ushtrimi 5

Një nxënës shkruan në tabelë numrat $1000,\ 1001,\ 1002,\ ...,\ 2999$. Më pas ai vendos të fshijë dy numra çfarëdo $a,\ b$ dhe të shkruajë në vend të tyre numrin e barabartë me $\frac{1}{2}\min(a,\ b)$.

Pasi ky nxënës e kryen këtë veprim 1999 herë, në tabelë mbetet një numër i vetëm, le të themi numri c. Provoni se $c \in \left]0,\ 1\right[$ **10 pikë**

Zgjidhje

Mjafton të tregojmë se $c<1$, pasi është e qartë se $c>0$.

Supozojmë fillimisht që $a \le b$, atëherë kuptohet se $\frac{1}{2}\min(a,\ b)=\frac{a}{2}$. Nga ana tjetër duke pasur parasysh vërtetësinë e mosbarazimit $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\le\frac{1}{\frac{a}{2}}$, shqyrtojmë shumën S të të anasjelltëve të numrave të shënuar fillimisht në dërrasë:

$$S=\frac{1}{1000}+\frac{1}{1001}+\frac{1}{1002}+...+\frac{1}{2999}\le\frac{1}{c}$$, ku $\frac{1}{c}$ do të jetë shuma në fund.

Vëmë re se për $1\le k\le 999$, kemi: $\frac{1}{2000-k}+\frac{1}{2000+k}=\frac{4000}{2000^2-k^2}>\frac{4000}{2000^2}=\frac{1}{1000}$.

Kështu që duke riorganizuar mbledhorët në shumën S, kemi:

$$\frac{1}{c}\ge\frac{1}{1000}+\left(\frac{1}{1001}+\frac{1}{2999}\right)+\left(\frac{1}{1002}+\frac{1}{2998}\right)+...+\left(\frac{1}{1999}+\frac{1}{2001}\right)+\frac{1}{2000}>\frac{1}{1000}\times1000+\frac{1}{2000}>1$$

Pra $\frac{1}{c}>1\Leftrightarrow c<1$, çka donim të provonim.

Shënim: Pranohet çdo zgjidhje tjetër e saktë, që nuk është parashikuar më lart, të cilin komisioni i vlerësimit e gjykon si të tillë.